

$a$	$b$	$s = \frac{1}{2}(a+b)$	$f(s)$
3,1416	4,6810	3,9113	-2,9422
3,9113	4,6810	4,2962	-2,0341
4,2962	4,6810	4,4886	-0,0954
4,4886	4,6810	4,5848	3,2095
4,4886	4,5848	4,5367	1,0963
4,4886	4,5367	4,5126	0,4271
4,4886	4,5126	4,5006	0,1508
4,4886	4,5006	4,4946	0,0244
4,4886	4,4946	4,4916	-0,0361
4,4916	4,4946	4,4931	-0,0062
4,4931	4,4946	4,4939	0,0089

Nulový bod leží v intervalu  $(4,4931; 4,4946)$  a číslo  $x_1 = 4,493$  je aproximací kořene s přesností  $10^{-3}$ . Pokud bychom náš výpočet prodloužili, získali bychom nulový bod s přesností  $10^{-7}$  jako  $x_1 = 4,4934095$ . ♥

```
procedure Bisect (f: funkce; var left: real; var right: real );
var midpoint, eps: real;
```

```
begin
eps:=1e-8;           {zadani presnosti vypoctu}
repeat
midpoint:=(left+right)/2;   {vypocet stredniho bodu}
if f(left)*f(midpoint)>0 then left:=midpoint
else right:=midpoint;
until abs(right-left)<eps;
end;
```

Pokud procedura úspěšně proběhne, je hledaný nulový bod bodem intervalu  $(left, right)$ . Délka intervalu je přitom menší než požadovaná přesnost  $eps$ .

**Věta 2.6. (O hodnotách spojitě funkce)** *Nechť  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá na  $(a, b)$  a v  $(a, b)$  není žádný nulový bod. Pak buď  $\forall x \in (a, b)$  je  $f(x) > 0$  nebo  $\forall x \in (a, b)$  je  $f(x) < 0$ .*

**Věta 2.7. (O obrazu spojitě funkce)** *Nechť  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá na libovolném intervalu  $I$ , pak  $f(I)$  je opět interval nebo jednoprvková množina.*

**Věta 2.8. (O spojitosti inverzní funkce)** *Nechť  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá a ryze monotonní na intervalu  $I$ . Pak  $f^{-1}$  je spojitá na  $f(I)$ .*

### 3. DERIVACE FUNKCE

**Definice 3.1.** *Nechť  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je definována na nějakém okolí  $U(a)$  bodu  $a \in \mathbb{R}$ . Pokud existuje limita*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a), \quad (D)$$

*nazýváme ji derivací funkce  $f$  v bodě  $a$ . Analogicky jako limity zprava, resp. zleva se definují derivace zprava v bodě  $a$ , resp. derivace zleva v bodě  $a$  a značíme je  $f'_+(a)$ , resp.  $f'_-(a)$ .*

- Pokud je hodnota limity (D) vlastní, jedná se o vlastní derivaci. V případě nevlastní hodnoty mluvíme o nevlastní derivaci.
- Hodnota derivace a její existence je lokální vlastnost funkce.
- Pokud zavedeme  $x = a + h$ , lze limitu (D) přepsat na tvar

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

- Uvědomme si, že pokud existuje limita, je určena jednoznačně, tedy každá funkce má v libovolném bodě nevyše jednu derivaci.
- Mějme funkci

$$f : y = f(x), x \in D(f) \text{ a množinu } D' = \{x \in D(f) \mid \text{existuje vlastní } f'(x)\}.$$

Pak  $f' : y = f'(x), x \in D'$  je také funkce a můžeme uvažovat o její derivaci v bodě  $a \in D' \subset D(f)$ . Derivaci  $(f')'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$  budeme nazývat *druhou derivací funkce v bodě  $a$*  a budeme ji značit  $f''(a)$ .

**Definice 3.2.** *Nechť  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  má vlastní derivaci  $f^{(n-1)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  v nějakém  $U(a)$ ,  $a \in D(f)$ , pak definujeme  $n$ -tou derivací funkce v bodě  $a$  jako*

$$f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a),$$

*pokud má pravá strana smysl. Dále klademe  $f^{(0)} = f$ .*

### 3.1. Základní vlastnosti derivace.

**Věta 3.1.** *Nechť  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Funkce  $f$  má v bodě  $a$  derivaci  $f'(a)$  právě když má v bodě  $a$  obě jednostranné derivace a platí  $f'_+(a) = f'_-(a) = A$ . Je pak  $f'(a) = A$ .*

**Věta 3.2.** *Má-li  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  v bodě  $a \in \mathbb{R}$  vlastní derivaci zprava  $f'_+(a)$ , je v tomto bodě spojitá zprava.*

**Věta 3.3.** *Nechť  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  má v bodě  $a \in \mathbb{R}$  vlastní obě jednostranné derivace (není nutné, aby si byly rovny). Pak  $f$  je v  $a$  spojitá.*

**Věta 3.4. (O derivaci součtu, součinu a podílu)** *Nechť  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mají v  $a \in \mathbb{R}$  vlastní derivace  $f'(a)$  a  $g'(a)$ . Pak*

- (1)  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ ,
- (2)  $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$ ,

*Je-li navíc  $g(a) \neq 0$ , platí*

$$(3) \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}.$$

**Věta 3.5. (O derivaci složené funkce)** *Nechť  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  má vlastní derivaci v bodě  $a \in \mathbb{R}$  a  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vlastní derivaci v bodě  $f(a)$ . Pak existuje vlastní derivace složené funkce  $g \circ f$  v bodě  $a$  a je*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

**Věta 3.6. (O derivaci inverzní funkce)** *Nechť  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá a ryze monotonní na intervalu  $\mathbf{I}$ , nechť  $f^{-1}$  je její inverzní funkce na  $\mathbf{I}$  a nechť  $a$  je vnitřní bod  $\mathbf{I}$ . Jestliže  $f'(a) \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ , pak*

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

## 3.2. Derivace elementárních funkcí.

Tabulka základních derivací

	$f$	$f'$	$D(f)$	$D(f')$	Poznámka
1.	const.	0	$\mathbb{R}$	=	
2.	$x^n$	$nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	=	$n \in \mathbb{N}$
3.	$x^z$	$zx^{z-1}$	$\mathbb{R}$	=	$z \in \mathbb{Z}$
4.	$x^a$	$ax^{a-1}$	$(0, \infty)$	=	$a \in \mathbb{R}$
5.	$e^x$	$e^x$	$\mathbb{R}$	=	
6.	$a^x$	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$	=	$a \in (0, \infty)$
7.	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(0, \infty)$	=	
8.	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$(0, \infty)$	=	$a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$
9.	$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	=	
10.	$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	=	
11.	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$	=	
12.	$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}$	=	
13.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\langle -1, 1 \rangle$	$(-1, 1)$	
14.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\langle -1, 1 \rangle$	$(-1, 1)$	
15.	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	=	
16.	$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	=	

"=" označuje rovnost definičních oborů  $D(f) = D(f')$

## Obecná pravidla pro derivování funkcí

	$F(x)$	$F'(x)$	
I.	$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$	(derivace součtu funkcí)
II.	$c \cdot f(x)$ , $c$ je konstanta	$c \cdot f'(x)$	(derivace násobku funkce)
III.	$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	(derivace součinu funkcí)
IV.	$\frac{1}{g(x)}$	$-\frac{g'(x)}{g^2(x)}$	(derivace převrácené funkce)
V.	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$	(derivace podílu funkcí)
VI.	$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$	(derivace složené funkce)
VII.	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$	
VIII.	$\ln f(x)$ (pro $f(x) > 0$ )	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	
IX.	$f(x)$ (pro $f(x) > 0$ )	$f(x) \cdot (\ln(f(x)))'$	(logaritmické derivování)
X.	$f(x)^{g(x)}$	$f(x)^{g(x)} \cdot \left( g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right)$	(podle log. derivování)

# Diferenciál funkce

Častou úlohou v matematické analýze je aproximovat danou funkci  $f$  nějakou jednodušší funkcí  $g$ , která se v jistém smyslu od  $f$  liší minimálně, tj. aby vzdálenost  $|f(x) - g(x)|$  byla malá. Předpokládejme, že funkce  $f$  je definovaná v jistém okolí bodu  $x_0$ . Hledejme jednoduchou funkci  $g$ , spojitou v bodě  $x_0$  tak, aby platilo

$$f(x_0) = g(x_0) \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x - x_0|} = 0.$$

Chyba aproximace by tak byla v okolí bodu  $x_0$  minimální. Jednou z nejjednodušších funkcí je  $g : y = ax + b$ . Aby tato funkce splnila první podmínku, musí být ve tvaru

$$g(x) = f(x_0) + a(x - x_0).$$

V tom případě má druhá podmínka tvar:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0.$$

Pro  $x - x_0 = h$  pak

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{h} \right| = 0.$$

Pokud taková funkce  $\lambda : \lambda(h) = ah, h \in \mathbb{R}$  existuje, nazveme ji diferenciál.

**Definice:** Nechť  $f : M \rightarrow \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}$ , a nechť  $x_0$  je vnitřním bodem množiny  $M$ . Říkáme, že funkce  $f$  má diferenciál v bodě  $x_0$ , existuje-li lineární funkce  $\lambda : \lambda(h) = ah$ , kde  $h \in \mathbb{R}$ , že platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{h} \right| = 0.$$

Značíme jej  $df(x_0)$ .

**Věta:** Funkce  $f$  je diferencovatelná (má diferenciál) v bodě  $x_0$ , právě když má v bodě  $x_0$  vlastní derivaci. V tomto případě je diferenciál určen jednoznačně  $df(x_0) = f'(x_0)h$ , kde  $h \in \mathbb{R}$ .

Pozn.: Můžeme tedy psát  $f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + f'(x_0)h$ .

**Příklad:** Určete přibližnou hodnotu  $\sqrt{4,1}$ .

Zvolme přírůstek  $h = 0,1$ , pak  $\sqrt{4,1} = \sqrt{4 + 0,1}$ .

$$f(x) = \sqrt{x}, \text{ pak } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ pro } x \in (0, \infty).$$

Tedy  $f'(4) = 0,25$  a  $df(x_0) = f'(4) \cdot 0,1 = 0,025$ .

Celkem tedy  $\sqrt{4 + 0,1} \doteq \sqrt{4} + 0,025 = 2,025$ .